© «Вестник ИГЭУ» Вып. 4 2009 г.

Расчет установившегося режима электроэнергетической системы с использованием методов Ньютона первого и второго порядков

Хачатрян В.С., Бадалян Н.П., доктора техн. наук, Чащин Е.А., канд. техн. наук

Предлагается новый метод расчета установившегося режима электроэнергетической системы с использованием матриц Гессе и Якоби.

Ключевые слова: модель, система, узел, режим, параметр, нагрузка, мощность, функция.

Calculation of being fixed mode electropower system combination of methods of first and second of orders of Newton

Hachatryan V.S., doctor techn. science, Badalyan N.P., doctor techn. science, Chaschin YE.A., cand. techn. science

New method of calculation of being fixed mode is offered with electropower system with use of matrixes of Hesse and Jacobi. Iterative process converges for three – four iteration.

Keywords: model, system, unit, mode, parameter, load, power, function.

В настоящее время для решения задачи расчета установившегося режима электроэнергетической системы (ЭЭС) широко используется У-Z форма задания состояния сети [1–6]. При этом большое практическое значение приобретает случай, когда независимые станционные узлы могут быть одновременно типов P-Q и P-U. Для построения соответствующей математической модели применяется следующая система индексов: $m(n) = 0, 1, 2, ..., C_1$, где C_1 – число станционных узлов типа P-Q (станционный узел с нулевым индексом, который называется зависимым узлом, выбирается в качестве базисного (балансирующего)); $k(l) = C_1 + 1, C_1 + 2, ..., C_1 + C_2$, где C_2 – число станционных узлов типа P-U; $i(j) = C + 1, C + 2, ..., C + H$, где H – число нагрузочных узлов типа P-Q, причем $C = C_1 + C_2$. Общее число независимых узлов – M.

Представляя У-Z расчетную матрицу на основании принятых выше индексов в развернутой форме, можно установить следующие уравнения для активных и реактивных мощностей независимых узлов:

$$P_m = P_{Бm} + U_m \sum_{n=1}^{C_1} \left[g_{m,n} \cos(\Psi_{Um} - \Psi_{Un}) + \right.$$
$$\left. + b_{m,n} \sin(\Psi_{Um} - \Psi_{Un}) \right] U_n +$$
$$+ U_m \sum_{l=C_1+1}^{C} \left[g_{m,l} \cos(\Psi_{Um} - \Psi_{Ul}) + b_{m,l} \sin(\Psi_{Um} - \Psi_{Ul}) \right] U_l, \quad (1)$$

$$Q_m = Q_{Бm} + U_m \sum_{n=1}^{C_1} \left[g_{m,n} \sin(\Psi_{Um} - \Psi_{Un}) - \right.$$
$$\left. - b_{m,n} \cos(\Psi_{Um} - \Psi_{Un}) \right] U_n +$$
$$+ U_m \sum_{l=C_1+1}^{C} \left[g_{m,l} \sin(\Psi_{Um} - \Psi_{Ul}) - b_{m,l} \cos(\Psi_{Um} - \Psi_{Ul}) \right] U_l, \quad (2)$$

$$P_k = P_{Бk} + U_k \sum_{n=1}^{c_1} \left[g_{k,n} \cos(\Psi_{Uk} - \Psi_{Un}) + \right.$$
$$\left. + b_{k,n} \sin(\Psi_{Uk} - \Psi_{Un}) \right] U_n +$$
$$+ U_k \sum_{l=c_1+1}^{c} \left[g_{k,l} \cos(\Psi_{Uk} - \Psi_{Ul}) + b_{k,l} \sin(\Psi_{Uk} - \Psi_{Ul}) \right] U_l, \quad (3)$$

$$Q_k = Q_{Бk} + U_k \sum_{n=1}^{c_1} \left[g_{k,n} \sin(\Psi_{Uk} - \Psi_{Un}) - \right.$$
$$\left. - b_{k,n} \cos(\Psi_{Uk} - \Psi_{Un}) \right] U_n +$$
$$+ U_k \sum_{l=c_1+1}^{c} \left[g_{k,l} \sin(\Psi_{Uk} - \Psi_{Ul}) - b_{k,l} \cos(\Psi_{Uk} - \Psi_{Ul}) \right] U_l, \quad (4)$$

$$P_i = P_{Бi} + \sum_{j=c+1}^{M} \left[R_{i,j} \left(I'_i I'_j + I''_i I''_j \right) + R_{i,j} \left(I''_i I'_j - I'_i I''_j \right) \right], \quad (5)$$

$$Q_i = Q_{Бi} + \sum_{j=c+1}^{M} \left[X_{i,j} \left(I'_i I'_j + I''_i I''_j \right) - R_{i,j} \left(I''_i I'_j - I'_i I''_j \right) \right]. \quad (6)$$

В выражениях (1)–(6):

$$P_{Бm} = -\sum_{l=1}^{c}\left[g_{m,l}\cos\Psi_{Um} + b_{m,l}\sin\Psi_{Um}\right]U_m U_0 + \sum_{j=c+1}^{M}\left[\left(A'_{m,j}I'_j - A''_{m,j}I''_j\right)\cos\Psi_{Um} + \left(A'_{m,j}I''_j + A''_{m,j}I'_j\right)\sin\Psi_{Um}\right]U_m, \quad (7)$$

$$Q_{Бm} = -\sum_{l=1}^{c}\left[g_{m,l}\sin\Psi_{Um} + b_{m,l}\cos\Psi_{Um}\right]U_m U_0 + \sum_{j=c+1}^{M}\left[\left(A'_{m,j}I'_j - A''_{m,j}I''_j\right)\sin\Psi_{Um} - \left(A'_{m,j}I''_j + A''_{m,j}I'_j\right)\cos\Psi_{Um}\right]U_m, \quad (8)$$

$$P_{Бk} = -\sum_{l=1}^{c}\left[g_{k,l}\cos\Psi_{Uk} + b_{k,l}\sin\Psi_{Uk}\right]U_k U_0 + \sum_{j=c+1}^{M}\left[\left(A'_{k,j}I'_j - A''_{k,j}I''_j\right)\cos\Psi_{Uk} + \left(A'_{k,j}I''_j + A''_{k,j}I'_j\right)\sin\Psi_{Uk}\right]U_k, \quad (9)$$

$$Q_{Бk} = -\sum_{l=1}^{c}\left[g_{k,l}\sin\Psi_{Uk} + b_{k,l}\cos\Psi_{Uk}\right]U_k U_0 + \sum_{j=c+1}^{M}\left[\left(A'_{k,j}I'_j - A''_{k,j}I''_j\right)\sin\Psi_{Uk} + \left(A'_{k,j}I''_j + A''_{k,j}I'_j\right)\cos\Psi_{Uk}\right]U_m, \quad (10)$$

$$P_{Бi} = I'_i U_0 - \sum_{l=1}^{c}\left(B'_{i,l}I'_i - B''_{i,l}I''_i\right)U_0 + \sum_{l=1}^{C}\left[\left(B'_{i,l}I'_i + B''_{i,l}I''_i\right)\cos\Psi_{Ul} - \left(B''_{i,l}I'_i - B'_{i,l}I''_i\right)\sin\Psi_{Ul}\right]U_l, \quad (11)$$

$$Q_{Бi} = -I''_i U_0 + \sum_{l=1}^{c}\left(B'_{i,l}I''_i - B''_{i,l}I'_i\right)U_0 + \sum_{l=1}^{C}\left[\left(B''_{i,l}I'_i - B'_{i,l}I''_i\right)\cos\Psi_{Ul} + \left(B'_{i,l}I'_i + B''_{i,l}I''_i\right)\sin\Psi_{Ul}\right]U_l. \quad (12)$$

Представим уравнения активных и реактивных мощностей в виде неявновыраженных функций:

$$\begin{cases}\Phi_{pm} = P_m - \left[P_{Бm} + \varphi_{pm}\left(U_n,\Psi_{un},U_l,\Psi_{ul}\right)\right] = 0,\\ \Phi_{qm} = Q_m - \left[Q_{Бm} + \varphi_{qm}\left(U_n,\Psi_{un},U_l,\Psi_{ul}\right)\right] = 0,\end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases}\Phi_{pk} = P_k - \left[P_{Бk} + \varphi_{pk}\left(U_n,\Psi_{un},U_l,\Psi_{ul}\right)\right] = 0,\\ \Phi_{qk} = Q_k - \left[Q_{Бk} + \varphi_{qk}\left(U_n,\Psi_{un},U_l,\Psi_{ul}\right)\right] = 0,\end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases}\Phi_{pi} = P_i - \left[P_{Бi} + \varphi_{pi}\left(I'_j I''_j\right)\right] = 0,\\ \Phi_{qi} = Q_i - \left[Q_{Бi} + \varphi_{qi}\left(I'_j I''_j\right)\right] = 0,\end{cases} \quad (15)$$

Поскольку при известных аргументах комплексных напряжений станционных узлов типа P-U можно установить численные значения реактивных мощностей, то из системы уравнений (14) можно исключить вторую систему, и тогда вышеприведенные неявновыраженные расчетные функции окончательно принимают следующий вид:

$$\begin{cases}\Phi_{pm}\left(U_n,\Psi_{un},U_l,\Psi_{ul}\right) = 0;\\ \Phi_{qm}\left(U_n,\Psi_{un},U_l,\Psi_{ul}\right) = 0;\\ \Phi_{pk}\left(U_n,\Psi_{un},U_l,\Psi_{ul}\right) = 0;\end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases}\Phi_{pi}\left(I'_j I''_j\right) = 0;\\ \Phi_{qi}\left(I'_j I''_j\right) = 0;\end{cases} \quad (17)$$

Порядок систем нелинейных функций (16) характеризуется числом независимых станционных узлов, а порядок системы (17) – числом нагрузочных узлов.

С другой стороны, решения систем нелинейных функций (16) характеризуются медленной сходимостью, тогда как решения системы (17) – быстрой сходимостью.

В силу этого, системы нелинейных функций (16) предлагается решить быстродействующим методом второго порядка, а системы (17) – методом первого порядка.

Сначала рассмотрим решение систем (16) методом второго порядка или методом минимизации.

Согласно теории решения систем нелинейных функций методом минимизации, необходимо построить соответствующую квадратичную функцию, которая в данном случае представляется в виде

$$F\left(U_m,\Psi_{um},\Psi_{uk}\right) = \sum_{C}\left(\Phi_{pm}^2 + \Phi_{qm}^2 + \Phi_{pk}^2\right). \quad (18)$$

Введем следующее обозначение:

$$\omega = \left(U_m, \Psi_{um}, \Psi_{uk}\right). \qquad (19)$$

Тогда выражение (18) принимает вид

$$F(\omega) = \sum_C \left(\Phi_{pm}^2 + \Phi_{qm}^2 + \Phi_{pk}^2\right). \qquad (20)$$

Разлагая в ряд Тейлора функцию (20), получим

$$F(\omega) = F\left(\omega^0\right) + \\ + \left.\frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega^0} \Delta\omega + \frac{1}{2}\Delta\omega^T \left.\frac{\partial^2 F(\omega)}{\partial \omega^2}\right|_{\omega^0} \Delta\omega + F(\omega)_b, \qquad (21)$$

где $F(\omega)_b$ – члены ряда Тейлора, имеющие производные выше второго порядка; T – знак транспонирования.

Пренебрегая $F(\omega)_b$, выражение (21) принимает вид

$$F(\omega) = F\left(\omega^0\right) + \left.\frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega^0} \Delta\omega + \frac{1}{2}\Delta\omega^T \left.\frac{\partial^2 F(\omega)}{\partial \omega^2}\right|_{\omega^0} \Delta\omega. \qquad (22)$$

Теперь необходимо найти такое приращение $\Delta\omega$ вектора ω, который минимизирует функцию (22).

Для этого необходимо функцию (22) взять в производную по $\Delta\omega$, т.е.

$$\frac{\partial F(\omega)}{\partial \Delta\omega} = 0 \qquad (23)$$

или

$$\frac{\partial F(\omega)}{\partial \Delta\omega}\left[F\left(\omega^0\right) + \left.\frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega^0} \Delta\omega + \frac{1}{2}\Delta\omega^T \left.\frac{\partial^2 F(\omega)}{\partial \omega^2}\right|_{\omega^0} \Delta\omega\right] = 0. \qquad (24)$$

Поскольку

$$\frac{\partial F\left(\omega^0\right)}{\partial \Delta\omega} = 0, \qquad (25)$$

то выражение (24) принимает более упрощенный вид:

$$\frac{\partial}{\partial \Delta\omega}\left[\left.\frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega^0} \Delta\omega + \frac{1}{2}\Delta\omega^T \left.\frac{\partial^2 F(\omega)}{\partial \omega^2}\right|_{\omega^0} \Delta\omega\right] = 0. \qquad (26)$$

Рассматривая производные по отдельным элементам, получаем

$$\left.\frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega^0} + \left.\frac{\partial^2 F(\omega)}{\partial \omega^2}\right|_{\omega^0} \Delta\omega = 0 \qquad (27)$$

или

$$\left.\frac{\partial^2 F(\omega)}{\partial \omega^2}\right|_{\omega^0} \Delta\omega = -\left.\frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega^0}. \qquad (28)$$

Введем также следующее обозначение:

$$\left[\frac{\partial^2 F(\omega)}{\partial \omega^2}\right] = \left[H(\omega)\right], \qquad (29)$$

которое называется матрицей Гессе, элементы которой состоят из частных производных второго порядка от заданной функции. Матрица Гессе является квадратной и особенной, в силу чего имеет обратную ей матрицу.

С другой стороны,

$$\left[\frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega}\right] = \left[G(\omega)\right] \qquad (30)$$

и является столбцевой матрицей градиента от заданной нелинейной функции.

В результате выражение (28) принимает следующий вид:

$$\Delta\omega = -\left[H(\omega)\right]_{\omega^0}^{-1} \times \left[G(\omega)\right]_{\omega^0}. \qquad (31)$$

Выражение (31) изображает приращение вектора ω и является его корректирующим элементом.

Новый вектор можно определить на основании следующего выражения:

$$[\omega]^1 = [\omega]^0 + [\Delta\omega]. \qquad (32)$$

Для производного N-го шага или итерации выражение (32) представляется как рекуррентное выражение в виде

$$[\omega]^{N+1} = [\omega]^N + [\Delta\omega]^N \qquad (33)$$

или в регулярной форме

$$[\omega]^{N+1} = [\omega]^N - \left[H(\omega)\right]^{-1} \times \left[G(\omega)\right], \qquad (34)$$

где N – номер итерации или шага.

Поскольку вектор ω состоит из трех компонентов: U_m, Ψ_{um} и Ψ_{uk}, то рекуррентное выражение (34) в развернутой форме представляется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} U_m \\ \cdots \\ \Psi_{um} \\ \cdots \\ \Psi_{uk} \end{bmatrix}^{N+1} = \begin{bmatrix} U_m \\ \cdots \\ \Psi_{um} \\ \cdots \\ \Psi_{uk} \end{bmatrix}^{N} -$$

$$- \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_m \partial U_n} \vdots \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_m \partial \Psi_{un}} \vdots \dfrac{\partial^2 F}{\partial U_m \partial \Psi_{ul}} \\ \cdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \cdots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{um} \partial U_n} \vdots \dfrac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{um} \partial \Psi_{un}} \vdots \dfrac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{um} \partial \Psi_{ul}} \\ \cdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \cdots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{uk} \partial U_n} \vdots \dfrac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{uk} \partial \Psi_{un}} \vdots \dfrac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{uk} \partial \Psi_{ul}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial U_{um}} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial \Psi_{um}} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial \Psi_{uk}} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Теперь рассмотрим решение системы векторных уравнений (17). Введем следующие обозначения:

$$\Phi(I) = \left\lfloor \Phi_{pi}\left(I'_j, I''_j\right); \Phi_{qi}\left(I'_j, I''_j\right) \right\rfloor, \quad (36)$$

где $I = \left(I'_j, I''_j\right)$. (37)

Разлагая (36) в ряд Тейлора, можем написать

$$\Phi(I) = \Phi\left(I^0\right) + \frac{\partial \Phi(I)}{\partial I}\Big|_{I_0} \Delta I + F(I)_B, \quad (38)$$

где $F(I)_B$ – члены ряда Тейлора, имеющие производные выше первого порядка.

Пренебрегая $F(I)_B$, выражение(38) принимает следующий вид:

$$\Phi(I) = \Phi\left(I^0\right) + \frac{\partial \Phi(I)}{\partial I}\Big|_{I_0} \Delta I. \quad (39)$$

Из этого следует

$$\frac{\partial \Phi(I)}{\partial I}\Big|_{I_0} \Delta I = \Phi(I) - \Phi\left(I^0\right)$$

или

$$\left[\frac{\partial \Phi(I)}{\partial I}\Big|_{I_0}\right] \Delta I = -\left[\Phi(I)\right] - \left[\Phi\left(I^0\right)\right]. \quad (40)$$

Здесь первый множитель слева является неособенной квадратной матрицей Якоби, которая имеет обратную ей матрицу. Поскольку в точке решения Φ(I) равно нулю, то после обращения матрицы Якоби выражение (40) будет принимать следующий вид:

$$\left[\Delta I\right] = -\left[\frac{\partial \Phi}{\partial I}\Big|_{I_0}\right]^{-1} \times \left[\Phi\left(I^0\right)\right]. \quad (41)$$

Новый вектор тока $[I]^1$ можно определить с учетом поправки (41):

$$[I]^1 = \left[I^0\right]^0 + [\Delta I]. \quad (42)$$

Для произвольного N-го шага или итерации выражение (42) также представляется как рекуррентное выражение следующего вида:

$$[I]^{И+1} = [I]^{И} - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial I}\right]^{-1} \times \left[\Phi(I)\right]. \quad (43)$$

Здесь также вектор I состоит из двух компонентов I' и I'', в результате чего рекуррентное выражение (43) в развернутой форме можно представить как

$$\begin{bmatrix} I'_i \\ \cdots \\ I''_i \end{bmatrix}^{И+1} = \begin{bmatrix} I'_i \\ \cdots \\ I''_i \end{bmatrix}^{И} - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_{pi}(I)}{\partial I'_i} \vdots \dfrac{\partial \Phi_{pi}(I)}{\partial I''_i} \\ \cdots \quad \vdots \quad \cdots \\ \dfrac{\partial \Phi_{qi}(I)}{\partial I'_i} \vdots \dfrac{\partial \Phi_{qi}(I)}{\partial I''_i} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \Phi_{pi} \\ \cdots \\ \Phi_{qi} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Теперь необходимо установить выражения частных производных, входящих как в рекуррентное выражение (35), так и в рекуррентное выражение (44).

Частные производные первого порядка, входящие в рекуррентное выражение (35), определяются следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial U_m} = 2\sum_C \left(\Phi_{pn} \frac{\partial \Phi_{pn}}{\partial U_m} + \Phi_{qn} \frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial U_m} + \Phi_{pk} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial U_m}\right); \quad (45)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Psi_{Um}} = 2\sum_C \left(\Phi_{pn} \frac{\partial \Phi_{pn}}{\partial \Psi_{Um}} + \Phi_{qn} \frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial \Psi_{Um}} + \Phi_{pk} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial \Psi_{Um}}\right); \quad (46)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Psi_{Uk}} = 2\sum_C \left(\Phi_{pn} \frac{\partial \Phi_{pn}}{\partial \Psi_{Uk}} + \Phi_{qn} \frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial \Psi_{Uk}} + \Phi_{pk} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial \Psi_{Uk}}\right). \quad (47)$$

Частные производные второго порядка определяются на основании (45)–(46) и имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_m^2} = 2\sum_C \left[\left(\frac{\partial \Phi_{pn}}{\partial U_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial U_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial U_m}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \Phi_{pn} \frac{\partial^2 \Phi_{pn}}{\partial U_m^2} + \Phi_{qn} \frac{\partial^2 \Phi_{qn}}{\partial U_m^2} + \Phi_{pk} \frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial U_m^2}\right]; \quad (48)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{Um}^2} = 2\sum_C \left[\left(\frac{\partial \Phi_{pn}}{\partial \Psi_{Um}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial \Psi_{Um}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial \Psi_{Um}}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \Phi_{pn}\frac{\partial^2 \Phi_{pn}}{\partial \Psi_{Um}^2} + \Phi_{qn}\frac{\partial^2 \Phi_{qn}}{\partial \Psi_{Um}^2} + \Phi_{pk}\frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial \Psi_{Um}^2}\right]; \tag{49}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{Uk}^2} = 2\sum_C \left[\left(\frac{\partial \Phi_{pn}}{\partial \Psi_{Uk}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial \Psi_{Uk}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial \Psi_{Uk}}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \Phi_{pn}\frac{\partial^2 \Phi_{pn}}{\partial \Psi_{Uk}^2} + \Phi_{qn}\frac{\partial^2 \Phi_{qn}}{\partial \Psi_{Uk}^2} + \Phi_{pk}\frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial \Psi_{Uk}^2}\right]; \tag{50}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_m \partial U_n} = 2\sum_C \left[\frac{\partial \Phi_{pn}}{\partial U_n}\cdot\frac{\partial \Phi_{pn}}{\partial U_m} + \frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial U_n}\cdot\frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial U_m} + \right.$$
$$+ \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial U_n}\cdot\frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial U_m} + \Phi_{pn}\frac{\partial^2 \Phi_{pn}}{\partial U_m \partial U_n} + \Phi_{qn}\frac{\partial^2 \Phi_{qn}}{\partial U_m \partial U_n} +$$
$$\left. + \Phi_{pk}\frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial U_m \partial U_n}\right]; \tag{51}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_m \partial \Psi_{Un}} = 2\sum_C \left[\frac{\partial \Phi_{pn}}{\partial \Psi_{Un}}\cdot\frac{\partial \Phi_{pn}}{\partial U_m} + \frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial \Psi_{Un}}\cdot\frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial U_m} + \right.$$
$$+ \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial \Psi_{Un}}\cdot\frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial U_m} + \Phi_{pn}\frac{\partial^2 \Phi_{pn}}{\partial U_m \partial \Psi_{Un}} + \Phi_{qn}\frac{\partial^2 \Phi_{qn}}{\partial U_m \partial \Psi_{Un}} +$$
$$\left. + \Phi_{pk}\frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial U_m \partial \Psi_{Un}}\right]; \tag{52}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_m \partial \Psi_{Ul}} = 2\sum_C \left[\frac{\partial \Phi_{pn}}{\partial \Psi_{Ul}}\cdot\frac{\partial \Phi_{pn}}{\partial U_m} + \frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial \Psi_{Ul}}\cdot\frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial U_m} + \right.$$
$$+ \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial \Psi_{Ul}}\cdot\frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial U_m} + \Phi_{pn}\frac{\partial^2 \Phi_{pn}}{\partial U_m \partial \Psi_{Ul}} + \Phi_{qn}\frac{\partial^2 \Phi_{qn}}{\partial U_m \partial \Psi_{Ul}} +$$
$$\left. + \Phi_{pk}\frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial U_m \partial \Psi_{Ul}}\right]; \tag{53}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{Um} \partial U_n} = 2\sum_C \left[\frac{\partial \Phi_{pn}}{\partial U_n}\cdot\frac{\partial \Phi_{pn}}{\partial \Psi_{Um}} + \frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial U_n}\cdot\frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial \Psi_{Um}} + \right.$$
$$+ \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial U_n}\cdot\frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial \Psi_{Um}} + \Phi_{pn}\frac{\partial^2 \Phi_{pn}}{\partial \Psi_{Um} \partial U_n} + \Phi_{qn}\frac{\partial^2 \Phi_{qn}}{\partial \Psi_{Um} \partial U_n} +$$
$$\left. + \Phi_{pk}\frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial \Psi_{Um} \partial U_n}\right]; \tag{54}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{Um} \partial \Psi_{Un}} = 2\sum_C \left[\frac{\partial \Phi_{pn}}{\partial \Psi_{Un}}\cdot\frac{\partial \Phi_{pn}}{\partial \Psi_{Um}} + \frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial \Psi_{Um}}\cdot\frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial \Psi_{Un}} + \right.$$
$$+ \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial \Psi_{Un}}\cdot\frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial \Psi_{Um}} + \Phi_{pn}\frac{\partial^2 \Phi_{pn}}{\partial \Psi_{Um} \partial \Psi_{Un}} + \Phi_{qn}\frac{\partial^2 \Phi_{qn}}{\partial \Psi_{Um} \partial \Psi_{Un}} +$$
$$\left. + \Phi_{pk}\frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial \Psi_{Um} \partial \Psi_{Un}}\right]; \tag{55}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{Um} \partial \Psi_{Ul}} = 2\sum_C \left[\frac{\partial \Phi_{pn}}{\partial \Psi_{Ul}}\cdot\frac{\partial \Phi_{pn}}{\partial \Psi_{Um}} + \frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial \Psi_{Um}}\cdot\frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial \Psi_{Ul}} + \right.$$
$$+ \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial \Psi_{Ul}}\cdot\frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial \Psi_{Um}} + \Phi_{pn}\frac{\partial^2 \Phi_{pn}}{\partial \Psi_{Um} \partial \Psi_{Ul}} + \Phi_{qn}\frac{\partial^2 \Phi_{qn}}{\partial \Psi_{Um} \partial \Psi_{Ul}} +$$
$$\left. + \Phi_{pk}\frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial \Psi_{Um} \partial \Psi_{Ul}}\right]; \tag{56}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{Uk} \partial U_n} = 2\sum_C \left[\frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial \Psi_{Uk}}\cdot\frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U_n} + \frac{\partial \Phi_{qm}}{\partial \Psi_{Uk}}\cdot\frac{\partial \Phi_{qm}}{\partial U_n} + \right.$$
$$+ \frac{\partial \Phi_{pl}}{\partial \Psi_{Uk}}\cdot\frac{\partial \Phi_{pl}}{\partial U_n} + \Phi_{pm}\frac{\partial^2 \Phi_{pm}}{\partial \Psi_{Uk} \partial U_n} + \Phi_{qm}\frac{\partial^2 \Phi_{qm}}{\partial \Psi_{Uk} \partial U_n} +$$
$$\left. + \Phi_{pl}\frac{\partial^2 \Phi_{pl}}{\partial \Psi_{Uk} \partial U_n}\right]; \tag{57}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \Psi_{Uk} \partial \Psi_{Un}} = 2\sum_C \left[\frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial \Psi_{Uk}}\cdot\frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial \Psi_{Un}} + \frac{\partial \Phi_{qm}}{\partial \Psi_{Uk}}\cdot\frac{\partial \Phi_{qm}}{\partial \Psi_{Un}} + \right.$$
$$+ \frac{\partial \Phi_{pl}}{\partial \Psi_{Uk}}\cdot\frac{\partial \Phi_{pl}}{\partial \Psi_{Un}} + \Phi_{pm}\frac{\partial^2 \Phi_{pm}}{\partial \Psi_{Uk} \partial \Psi_{Un}} + \Phi_{qm}\frac{\partial^2 \Phi_{qm}}{\partial \Psi_{Uk} \partial \Psi_{Un}} +$$
$$\left. + \Phi_{pl}\frac{\partial^2 \Phi_{pl}}{\partial \Psi_{Uk} \partial \Psi_{Un}}\right]; \tag{58}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\Psi_{Uk}\partial\Psi_{Ul}} = 2\sum_{C}\left[\frac{\partial\Phi_{pm}}{\partial\Psi_{Uk}}\cdot\frac{\partial\Phi_{pm}}{\partial\Psi_{Ul}} + \frac{\partial\Phi_{qm}}{\partial\Psi_{Uk}}\cdot\frac{\partial\Phi_{qm}}{\partial\Psi_{Ul}} + \right.$$
$$+\frac{\partial\Phi_{pl}}{\partial\Psi_{Uk}}\cdot\frac{\partial\Phi_{pl}}{\partial\Psi_{Ul}} + \Phi_{pm}\frac{\partial^2\Phi_{pm}}{\partial\Psi_{Uk}\partial\Psi_{Ul}} + \Phi_{qm}\frac{\partial^2\Phi_{qm}}{\partial\Psi_{Uk}\partial\Psi_{Ul}} +$$
$$\left. +\Phi_{pl}\frac{\partial^2\Phi_{pl}}{\partial\Psi_{Uk}\partial\Psi_{Ul}}\right]. \quad (59)$$

Частные производные, входящие в правые части выражений (45)–(59), определяются на основании (16), их целесообразно представить в следующем виде:

$$\Phi_{pm} = P_m - \left\{P_{Бm} + g_{m,m}U_m^2 + U_m\sum_{n=1}^{C_1}\left[g_{m,n}\cos(\Psi_{um}-\Psi_{un}) + \right.\right.$$
$$+b_{m,n}\sin(\Psi_{um}-\Psi_{un})\Big]U_n + U_m\sum_{l=C_1+1}^{C}\Big[g_{m,l}\cos(\Psi_{um}-\Psi_{ul}) +$$
$$\left.\left. +b_{m,l}\sin(\Psi_{um}-\Psi_{ul})\right]\ U_l\right\}; \quad (60)$$

$$\Phi_{qm} = Q_m - \left\{Q_{Бm} + b_{m,m}U_m^2 + U_m\sum_{n=1}^{C_1}\left[g_{m,n}\sin(\Psi_{um}-\Psi_{un}) - \right.\right.$$
$$-b_{m,n}\cos(\Psi_{um}-\Psi_{un})\Big]U_n + U_m\sum_{l=C_1+1}^{C}\Big[g_{m,l}\sin(\Psi_{um}-\Psi_{ul}) -$$
$$\left.\left. -b_{m,l}\cos(\Psi_{um}-\Psi_{ul})\right]\ U_l\right\}; \quad (61)$$

$$\Phi_{pk} = P_k - \left\{P_{Бk} + g_{k,k}U_k^2 + U_k\sum_{n=1}^{C_1}\left[g_{k,n}\cos(\Psi_{uk}-\Psi_{un}) + \right.\right.$$
$$+b_{k,n}\sin(\Psi_{uk}-\Psi_{un})\Big]U_n + U_k\sum_{l=C_1+1}^{C}\Big[g_{k,l}\cos(\Psi_{um}-\Psi_{ul}) -$$
$$\left.\left. -b_{k,l}\sin(\Psi_{um}-\Psi_{ul})\right]\ U_l\right\}; \quad (62)$$

$$\Phi_{qk} = Q_k - \left\{Q_{Бk} + b_{k,k}U_k^2 + U_k\sum_{n=1}^{C_1}\left[g_{k,n}\sin(\Psi_{uk}-\Psi_{un}) - \right.\right.$$
$$-b_{k,n}\cos(\Psi_{uk}-\Psi_{un})\Big]U_n + U_k\sum_{l=C_1+1}^{C}\Big[g_{k,l}\sin(\Psi_{um}-\Psi_{ul}) -$$
$$\left.\left. -b_{k,l}\cos(\Psi_{um}-\Psi_{ul})\right]\ U_l\right\}. \quad (63)$$

На основании (60)–(63) можно установить аналитические выражения необходимых частных производных, входящих в (45)–(59), при этом учитывая равнозначность индексов *m* и *n*, *k* и *l*.

В силу этого, выражения (60), (61) можно переписать также в следующем виде:

$$\Phi_{pn} = P_n - \left\{P_{Бn} + g_{n,n}U_n^2 + U_n\sum_{m=1,m\neq n}^{C_1}\left[g_{n,m}\cos(\Psi_{un}-\Psi_{um}) + \right.\right.$$
$$+b_{n,m}\sin(\Psi_{un}-\Psi_{um})\Big]U_m + U_n\sum_{l=C_1+1}^{C}\Big[g_{n,l}\cos(\Psi_{un}-\Psi_{ul}) +$$
$$\left.\left. +b_{n,l}\sin(\Psi_{un}-\Psi_{ul})\right]\ U_l\right\}; \quad (64)$$

$$\Phi_{qn} = Q_n - \left\{Q_{Бn} + b_{n,n}U_n^2 + U_n\sum_{m=1}^{C_1}\left[g_{n,m}\sin(\Psi_{un}-\Psi_{um}) - \right] + \right.$$
$$b_{n,m}\cos(\Psi_{un}-\Psi_{um})\Big]U_m + U_n\sum_{l=C_1+1}^{C}\Big[g_{n,l}\sin(\Psi_{un}-\Psi_{ul}) -$$
$$\left.\left. -b_{n,l}\cos(\Psi_{un}-\Psi_{ul})\right]\ U_l\right\}. \quad (65)$$

С другой стороны, выражения (62), (63) также можно представить в следующем виде:

$$\Phi_{pl} = P_l - \left\{P_{Бl} + g_{l,l}U_l^2 + U_l\sum_{n=1}^{C_1}\left[g_{l,n}\cos(\Psi_{ul}-\Psi_{un}) + \right.\right.$$
$$+b_{l,n}\sin(\Psi_{ul}-\Psi_{un})\Big]U_n + U_l\sum_{k=C_1+1}^{C}\Big[g_{l,k}\cos(\Psi_{ul}-\Psi_{uk}) +$$
$$\left.\left. b_{l,k}\sin(\Psi_{ul}-\Psi_{uk})\right]\ U_k\right\}; \quad (66)$$

$$\Phi_{ql} = Q_l - \Big\{ Q_{Бl} + b_{l,l}U_l^2 + U_l \sum_{n=1}^{C_1} \big[g_{l,n} \sin(\Psi_{Ul} - \Psi_{Un}) -$$

$$-b_{l,n}\cos(\Psi_{Ul} - \Psi_{Un})\big] U_n + U_l \sum_{k=C_1+1}^{C} \big[g_{l,k} \sin(\Psi_{Ul} - \Psi_{Uk}) -$$

$$-b_{l,k}\cos(\Psi_{Ul} - \Psi_{Uk})\big] \;\; U_k \Big\}. \qquad (67)$$

На основании (64)–(67) можно установить аналитические выражения частных производных, входящих в выражения (45)–(59).

Частные производные, входящие в рекуррентное выражение (44), определяются приведенными ниже выражениями.

1. При одинаковых индексах, когда $j = i$:

$$\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i'} = -\left[\frac{\partial P_{Бi}}{\partial I_i'} + 2R_{i,i}I_i' + \sum_{\substack{j=C+1 \\ j\neq i}}^{M} \left(R_{i,j}I_j' - X_{i,j}I_j'' \right) \right];$$

$$\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i''} = -\left[\frac{\partial P_{Бi}}{\partial I_i''} + 2R_{i,i}I_i'' + \sum_{\substack{j=C+1 \\ j\neq i}}^{M} \left(R_{i,j}I_j'' + X_{i,j}I_j' \right) \right];$$

$$\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i'} = -\left[\frac{\partial Q_{Бi}}{\partial I_i'} - 2X_{i,i}I_i' + \sum_{\substack{j=C+1 \\ j\neq i}}^{M} \left(R_{i,j}I_j'' + X_{i,j}I_j' \right) \right];$$

$$\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i''} = -\left[\frac{\partial Q_{Бi}}{\partial I_i''} - 2X_{i,i}I_i'' - \sum_{\substack{j=C+1 \\ j\neq i}}^{M} \left(R_{i,j}I_j' - X_{i,j}I_j'' \right) \right], \qquad (68)$$

где

$$\frac{\partial P_{Бi}}{\partial I_i'} = U_0 - \sum_{t=1}^{C} B_{i,t}'U_0 + \sum_{t=1}^{C} \left(B_{i,t}'\cos\Psi_{ut} - B_{i,t}''\sin\Psi_{ut} \right) U_i;$$

$$\frac{\partial P_{Бi}}{\partial I_i''} = -\sum_{t=1}^{C} B_{i,t}''U_0 + \sum_{t=1}^{C} \left(B_{i,t}'\sin\Psi_{ut} + B_{i,t}''\cos\Psi_{ut} \right) U_i;$$

$$\frac{\partial Q_{Бi}}{\partial I_i'} = -\sum_{t=1}^{C} B_{i,t}''U_0 + \sum_{t=1}^{C} \left(B_{i,t}'\sin\Psi_{ut} + B_{i,t}''\cos\Psi_{ut} \right) U_i;$$

$$\frac{\partial Q_{Бi}}{\partial I_i''} = -U_0 + \sum_{t=1}^{C} B_{i,t}'U_0 - \sum_{t=1}^{C} \left(B_{i,t}'\cos\Psi_{ut} - B_{i,t}''\sin\Psi_{ut} \right) U_i.$$

При разных индексах:

$$\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_j'} = -\left(R_{i,j}I_i' + X_{i,j}I_i'' \right);$$

$$\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_j''} = -\left(R_{i,j}I_i'' - X_{i,j}I_i' \right);$$

$$\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_j'} = -\left(-R_{i,j}I_i'' + X_{i,j}I_i' \right);$$

$$\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_j''} = -\left(R_{i,j}I_i' + X_{i,j}I_i'' \right). \qquad (69)$$

Как нетрудно заметить, в (69) функционируют следующие соотношения:

$$\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_j'} = \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_j''}; \quad \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_j''} = -\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_j'}. \qquad (70)$$

Заключение

Предложенный новый метод расчета установившегося режима электроэнергетической системы, в котором одновременно независимые станционные узлы могут быть как типа P-Q, так и типа P-U, отличается высокой сходимостью и уменьшением числа итерации до 3–4.

Список литературы

1. **Хачатрян В.С., Хачатрян С.Ц., Сафарян В.С.** Расчет установившихся режимов электрических систем с применением матрицы Гессе при Z-форме задания состояния сети // Известия вузов. Энергетика. – 1983. – № 1. – С. 20–23.
2. **Хачатрян В.С., Этмекчян Э.А., Бадалян Н.П.** Решение гибридных уравнений установившегося режима электроэнергетической системы методом декомпозиции // Электричество. – 1999. – № 4. – С. 7–12.
3. **Метод** коррекции Y-Z расчетной матрицы электроэнергетической системы / В.С. Хачатрян, Н.П. Бадалян, К.В. Хачатрян, К.К. Маркарян // Известия НАН и ГИУА Армении Сер. ТН. – 2001. – № 1. – С. 41–46.
4. **Бадалян Н.П.** Построение «Y-Z, P-Q» математической модели установившегося режима ЭЭС и ее реализация методом минимизации // Известия НАН и ГИУА Армении Сер. ТН. – 2001. – № 3. – С. 372–378.
5. **Хачатрян В.С., Бадалян Н.П.** Диакоптическая «Y-Z, P-U» математическая модель установившегося режима ЭЭС и ее реализация методом минимизации // Известия НАН и ГИУА Армении Сер. ТН. – 2002. – № 3. – С. 392–399.
6. **Хачатрян В.С., Бадалян Н.П.** Расчет установившегося режима большой электроэнергетической системы методом диакоптики // Электричество. – 2003. – № 6. – С. 13–17.

Хачатрян Варос Саргисович,
Государственный инженерный университет Армении,
доктор технических наук, профессор кафедры электроэнергетики,
адрес: 375000, Армения, г. Ереван, ул. Теряна, д. 105.

Бадалян Норайр Петикович,
ГОУВПО «Ковровская государственная технологическая академия имени В.А. Дегтярёва»,
доктор технических наук, профессор кафедры электротехники,
телефон (49232) 3-20-62,

Чащин Евгений Анатольевич,
ГОУВПО «Ковровская государственная технологическая академия имени В.А. Дегтярёва»,
кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой электротехники,
телефон (49232) 3-20-62, факс (49232) 3-21-60,
e-mail: kanircha@list.ru